

En los problemas 25-46, determine los intervalos sobre los cuales la función dada  $f$  es creciente y los intervalos sobre los cuales es decreciente.

25.  $f(x) = x^2 + 5$

27.  $f(x) = x^2 + 6x - 1$

29.  $f(x) = x^3 - 3x^2$

31.  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 9$

33.  $f(x) = 1 - x^{1/3}$

35.  $f(x) = x + \frac{1}{x}$

37.  $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

26.  $f(x) = x^3$

28.  $f(x) = -x^2 + 10x + 3$

30.  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 8x + 1$

32.  $f(x) = 4x^5 - 10x^4 + 2$

34.  $f(x) = x^{2/3} - 2x^{1/3}$

36.  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

38.  $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

40.  $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

42.  $f(x) = (x^2 - 1)^3$

44.  $f(x) = -x + \tan x$

46.  $f(x) = x^2 e^{-x}$

En los problemas 47 y 48, demuestre, sin graficar, que la función dada no tiene extremos relativos.

47.  $f(x) = 4x^3 + x$

48.  $f(x) = -x + \sqrt{2-x}$

### ≡ Aplicaciones

49. Un motociclista entra a una carretera de peaje y en el comprobante de pago la hora indicada es 1:15 p.m. Luego de 70 millas, cuando el motociclista paga en la caseta de peaje a las 2:15 p.m., también recibe un comprobante de pago. Explique esto por medio del teorema del valor medio. Suponga que la velocidad límite es 65 mi/h.
50. En el análisis matemático de la tos humana se supone que la tráquea o tubo respiratorio es un tubo cilíndrico. Un modelo matemático para el volumen de aire (en  $\text{cm}^3/\text{s}$ ) que fluye a través de la tráquea durante su contracción es

$$V(r) = kr^4(r_0 - r), \quad r_0/2 \leq r \leq r_0,$$

donde  $k$  es una constante positiva y  $r_0$  es su radio cuando no hay diferencia de presión en los extremos del tubo respiratorio. Determine un intervalo para el cual  $V$  sea creciente y un intervalo para el cual  $V$  sea decreciente. ¿Con qué radio obtiene el volumen máximo de flujo de aire?

### ≡ Piense en ello

51. Considere la función  $f(x) = x^4 + x^3 - x - 1$ . Use esta función y el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación  $4x^3 + 3x^2 - 1 = 0$  tiene por lo menos una raíz en  $[-1, 1]$ .
52. Suponga que las funciones  $f$  y  $g$  son continuas sobre  $[a, b]$  y diferenciables sobre  $(a, b)$  de modo que  $f'(x) > 0$

y  $g'(x) > 0$  para toda  $x$  en  $(a, b)$ . Demuestre que  $f + g$  es una función creciente sobre  $[a, b]$ .

53. Suponga que las funciones  $f$  y  $g$  son continuas sobre  $[a, b]$  y diferenciables sobre  $(a, b)$  de modo que  $f'(x) > 0$  y  $g'(x) > 0$  para toda  $x$  en  $(a, b)$ . Proporcione una condición sobre  $f(x)$  y  $g(x)$  que garantice que el producto  $fg$  es creciente sobre  $[a, b]$ .
54. Demuestre que la ecuación  $ax^3 + bx + c = 0$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ , no puede tener dos raíces reales. [Sugerencia: Considere la función  $f(x) = ax^3 + bx + c$ . Suponga que hay dos números  $r_1$  y  $r_2$  tales que  $f(r_1) = f(r_2) = 0$ .]
55. Demuestre que la ecuación  $ax^2 + bx + c = 0$  tiene a lo sumo una raíz real. [Sugerencia: Considere la función  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Suponga que hay tres números distintos  $r_1, r_2$  y  $r_3$  tales que  $f(r_1) = f(r_2) = f(r_3) = 0$ .]
56. Para una función polinomial cuadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  demuestre que el valor de  $x_3$  que satisface la conclusión del teorema del valor medio sobre cualquier intervalo  $[x_1, x_2]$  es  $x_3 = (x_1 + x_2)/2$ .
57. Suponga que la gráfica de una función polinomial  $f$  tiene cuatro intersecciones  $x$  distintas. Analice: ¿cuál es el número mínimo de puntos en los cuales una recta tangente a la gráfica de  $f$  es horizontal?
58. Como se mencionó después del ejemplo 2, la hipótesis  $f(a) = f(b) = 0$  en el teorema de Rolle puede sustituirse por la hipótesis  $f(a) = f(b)$ .
- a) Encuentre una función explícita  $f$  definida sobre un intervalo  $[a, b]$  tal que  $f$  sea continua sobre el intervalo, diferenciable sobre  $(a, b)$  y  $f(a) = f(b)$ .
- b) Encuentre un número  $c$  para el que  $f'(c) = 0$ .
59. Considere la función  $f(x) = x \sin x$ . Use  $f$  y el teorema de Rolle para demostrar que la ecuación  $\cot x = -1/x$  tiene una solución sobre el intervalo  $(0, \pi)$ .

### ≡ Problemas con calculadora/SAC

60. a) Use una calculadora o un SAC para obtener la gráfica de  $f(x) = x - 4x^{1/3}$ .
- b) Compruebe que todas las hipótesis, excepto una del teorema de Rolle, se cumplen en el intervalo  $[-8, 8]$ .
- c) Determine si en  $(-8, 8)$  existe un número  $c$  para el cual  $f'(c) = 0$ .

En los problemas 61 y 62, use una calculadora para encontrar un valor de  $c$  que satisfaga la conclusión del teorema del valor medio.

61.  $f(x) = \cos 2x$ ;  $[0, \pi/4]$

62.  $f(x) = 1 + \sin x$ ;  $[\pi/4, \pi/2]$

## 5.4 Criterio de la primera derivada

■ **Introducción** Saber que una función tiene, o no, extremos relativos es de gran ayuda al trazar su gráfica. En la sección 5.2 (teorema 5.2.2) vimos que cuando una función tiene un extremo relativo debe ocurrir en un número crítico. Al encontrar los números críticos de una función, tenemos una lista de candidatos para las coordenadas  $x$  de los puntos que correspon-



den a extremos relativos. A continuación se combinarán las ideas de las primeras secciones de esta unidad para establecer dos pruebas para determinar cuándo un número crítico es en realidad la coordenada  $x$  de un extremo relativo.

**■ Prueba de la primera derivada** Suponga que  $f$  es continua sobre el intervalo cerrado  $[a, b]$  y diferenciable sobre un intervalo abierto  $(a, b)$ , excepto tal vez en un número crítico  $c$  dentro del intervalo. Si  $f'(x) > 0$  para toda  $x$  en  $(a, c)$  y  $f'(x) < 0$  para toda  $x$  en  $(c, b)$ , entonces la gráfica de  $f$  sobre el intervalo  $(a, b)$  puede ser como se muestra en la FIGURA 5.4.1a; es decir,  $f(c)$  es un máximo relativo. Por otra parte, cuando  $f'(x) < 0$  para toda  $x$  en  $(a, c)$  y  $f'(x) > 0$  para toda  $x$  en  $(c, b)$ , entonces, como se muestra en la figura 5.4.1b),  $f(c)$  es un mínimo relativo. Se han demostrado dos casos especiales del siguiente teorema.

**Teorema 5.4.1** Criterio de la primera derivada

Sea  $f$  continua sobre  $[a, b]$  y diferenciable sobre  $(a, b)$  excepto tal vez en el número crítico  $c$ .

- Si  $f'(x)$  cambia de positiva a negativa en  $c$ , entonces  $f(c)$  es un máximo relativo.
- Si  $f'(x)$  cambia de negativa a positiva en  $c$ , entonces  $f(c)$  es un mínimo relativo.
- Si  $f'(x)$  tiene el mismo signo algebraico a cada lado de  $c$ , entonces  $f(c)$  no es un extremo.

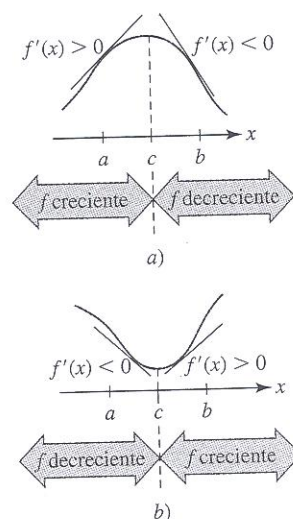


FIGURA 5.4.1 Máximo relativo en a); mínimo relativo en b)

Las conclusiones del teorema 5.4.1 pueden resumirse en una frase:

- Una función  $f$  tiene un extremo relativo en un número crítico  $c$  donde  $f'(x)$  cambia de signo.

En la FIGURA 5.4.2 se ilustra cuál sería el caso cuando  $f'(c)$  no cambia de signo en un número crítico  $c$ . En las figuras 5.4.2a) y 5.4.2b) se muestra una tangente horizontal en  $(c, f(c))$  y  $f'(c) = 0$  pero  $f(c)$  no es ni máximo ni mínimo relativo. En la figura 5.4.2c) se muestra una tangente vertical en  $(c, f(c))$  y así  $f'(c)$  no existe, pero de nuevo  $f(c)$  no es un extremo relativo porque  $f'(x)$  no cambia de signo en el número crítico  $c$ .

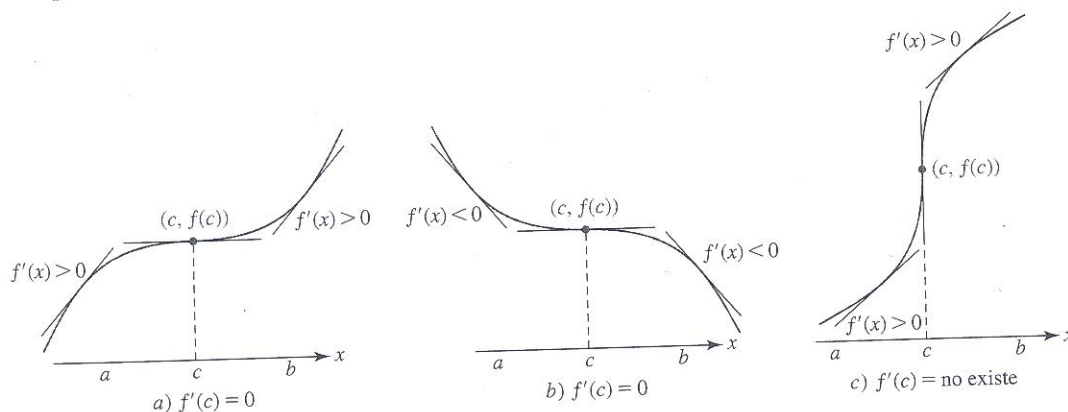


FIGURA 5.4.2 No hay extremo porque  $f'(x)$  no cambia de signo en el número crítico  $c$

En los cinco ejemplos siguientes se ilustra la utilidad del teorema 5.4.1 para trazar a mano la gráfica de una función  $f$ . Además del cálculo:

- Encuentre la derivada de  $f$  y factorice  $f'$  tanto como sea posible.
- Encuentre los números críticos de  $f$ .
- Aplice el criterio de la primera derivada a cada número crítico.

También resulta útil preguntar:

- ¿Cuál es el dominio de  $f$ ?
- La gráfica de  $f$ , ¿tiene alguna intersección?
- La gráfica de  $f$ , ¿tiene alguna simetría?
- La gráfica de  $f$ , ¿tiene alguna asíntota?

intersecciones  $x$ : resuelva  
para  $f(x) = 0$

← intersección  $y$ : encuentre  $f(0)$

← determine si  
 $f(-x) = f(x)$  o bien.  
 $f(-x) = -f(x)$

Las funciones consideradas en los ejemplos 1 y 2 son polinomiales. Observe que estas funciones constan de potencias pares e impares de  $x$ ; esto es suficiente para concluir que las gráficas de estas funciones no son simétricas con respecto al eje  $y$  o al origen.

### EJEMPLO 1 Función polinomial de grado 3

Grafique  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ .

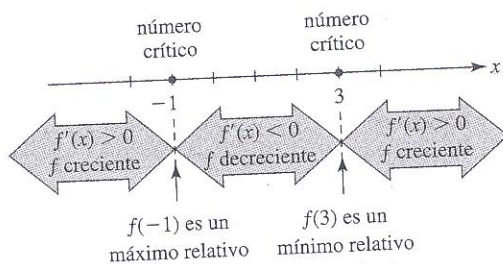
**Solución** La primera derivada

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x + 1)(x - 3) \quad (1)$$

produce los números críticos  $-1$  y  $3$ . Luego, el criterio de la primera derivada es esencialmente el procedimiento que se usó para encontrar los intervalos sobre los cuales  $f$  es creciente o decreciente. En la FIGURA 5.4.3a) vemos que  $f'(x) > 0$  para  $-\infty < x < -1$  y  $f'(x) < 0$  para  $-1 < x < 3$ . En otras palabras,  $f'(x)$  cambia de positiva a negativa en  $-1$  y así por el inciso i) del teorema 5.4.1 concluimos que  $f(-1) = 7$  es un máximo relativo. En forma semejante,  $f'(x) < 0$  para  $-1 < x < 3$  y  $f'(x) > 0$  para  $3 < x < \infty$ . Debido a que  $f'(x)$  cambia de negativa a positiva en  $3$ , el inciso ii) del teorema 5.4.1 indica que  $f(3) = -25$  es un mínimo relativo. Luego, como  $f(0) = 2$ , el punto  $(0, 2)$  es la intersección  $y$  para la gráfica de  $f$ . Además, al buscar si la ecuación  $x^3 - 3x^2 - 9x + 2 = 0$  tiene raíces positivas se encuentra que  $x = -2$  es una raíz real. Luego, al dividir entre el factor  $x + 2$  obtenemos  $(x + 2)(x^2 - 5x + 1) = 0$ . Cuando la fórmula cuadrática se aplica al factor cuadrático se encuentran dos raíces reales adicionales:

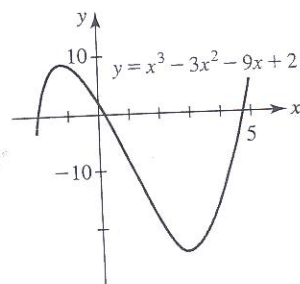
$$\frac{1}{2}(5 - \sqrt{21}) \approx 0.21 \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}(5 + \sqrt{21}) \approx 4.79.$$

Entonces, las intersecciones  $x$  son  $(-2, 0)$ ,  $(\frac{5}{2} - \frac{\sqrt{21}}{2}, 0)$  y  $(\frac{5}{2} + \frac{\sqrt{21}}{2}, 0)$ . Al reunir toda esta información se llega a la gráfica mostrada en la figura 5.4.3b):



a) Criterio de la primera derivada

FIGURA 5.4.3 Gráfica de la función en el ejemplo 1



b) Observe las intersecciones  $x$  y  $y$

### EJEMPLO 2 Función polinomial de grado 4

Grafique  $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$ .

**Solución** La derivada

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x - 3)$$

muestra que los números críticos son  $0$  y  $3$ . Luego, como se observa en la FIGURA 5.4.4a),  $f'$  tiene el mismo signo algebraico negativo en los intervalos adyacentes  $(-\infty, 0)$  y  $(0, 3)$ . Entonces  $f(0) = 10$  no es un extremo. En este caso  $f'(0) = 0$  significa que en la intersección  $y$   $(0, f(0)) = (0, 10)$  hay una sola tangente horizontal. Sin embargo, por el criterio de la primera derivada resulta evidente que  $f(3) = -17$  es un mínimo relativo. En efecto, la información de que  $f$  es decreciente por el lado izquierdo y creciente por el lado derecho del número crítico  $3$  (la gráfica de  $f$  no puede retroceder) permite concluir que  $f(3) = -17$  también es un mínimo absoluto. Por último, vemos que la gráfica de  $f$  tiene dos intersecciones  $x$ . Con ayuda de una calculadora o un SAC se encuentra que las intersecciones  $x$  son aproximadamente  $(1.61, 0)$  y  $(3.82, 0)$ .



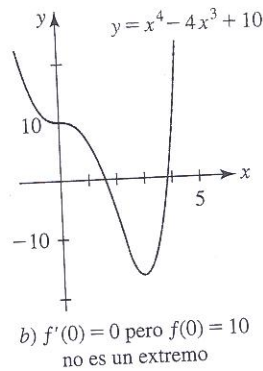
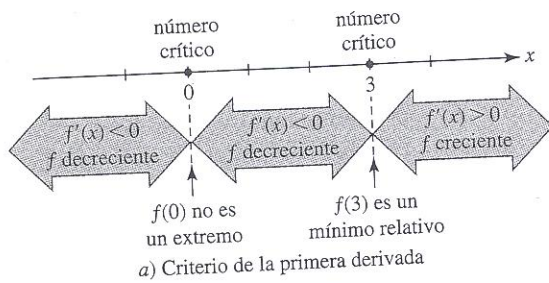


FIGURA 5.4.4 Gráfica de la función en el ejemplo 2

**EJEMPLO 3** Gráfica de una función racional

Grafique  $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1}$ .

**Solución** La lista que se muestra a continuación resume algunos hechos que es posible descubrir sobre la gráfica de esta función racional  $f$  antes de graficarla realmente.

*intersección y:*  $f(0) = -3$ ; en consecuencia, la intersección y es  $(0, -3)$ .

*intersecciones x:*  $f(x) = 0$  cuando  $x^2 - 3 = 0$ . Por tanto,  $x = -\sqrt{3}$  y  $x = \sqrt{3}$ . Las intersecciones x son  $(-\sqrt{3}, 0)$  y  $(\sqrt{3}, 0)$ .

*Simetría:* Con respecto al eje y, puesto que  $f(-x) = f(x)$ .

*Asíntotas verticales:* Ninguna, puesto que  $x^2 + 1 \neq 0$  para todos los números reales.

*Asíntotas horizontales:* Puesto que el límite en el infinito es la forma indeterminada  $\infty/\infty$ , podemos aplicar la regla de L'Hôpital para demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 1} \stackrel{h}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{2} = 1,$$

y así la recta  $y = 1$  es una asíntota horizontal (ver sección 5.9).

*Derivada:* Con la regla del cociente obtenemos  $f'(x) = \frac{8x}{(x^2 + 1)^2}$ .

*Números críticos:*  $f'(x) = 0$  cuando  $x = 0$ . En consecuencia, 0 es el único número crítico.

*Criterio de la primera derivada:* Vea la FIGURA 5.4.5a);  $f(0) = -3$  es un mínimo relativo.

*Grafique:* Vea la figura 5.4.5b).

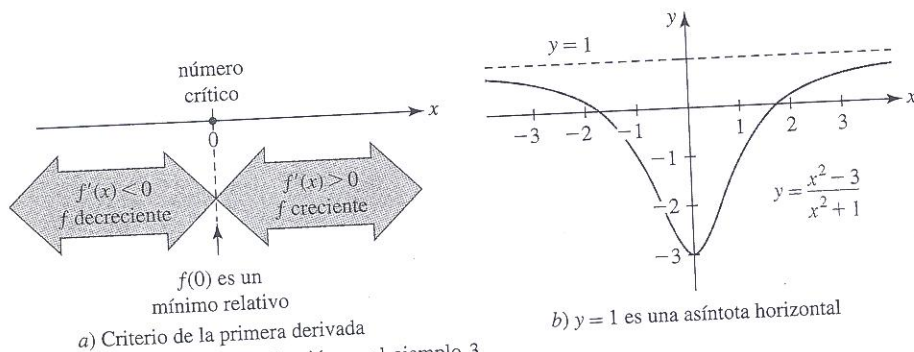


FIGURA 5.4.5 Gráfica de la función en el ejemplo 3

**EJEMPLO 4** Gráfica con una asíntota vertical

Grafique  $f(x) = x^2 + x - \ln|x|$ .

**Solución** Primero observe que el dominio de  $f$  es  $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ . Luego, al igualar a cero el denominador de la derivada

$$f'(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + x - 1}{x} = \frac{(2x - 1)(x + 1)}{x}.$$

se observa que  $-1$  y  $\frac{1}{2}$  son números críticos. Aunque  $f$  no es diferenciable en  $x = 0$ ,  $0$  no es un número crítico puesto que  $0$  no está en el dominio de  $f$ . De hecho,  $x = 0$  es una asíntota vertical para  $\ln|x|$  y también es una asíntota vertical para la gráfica de  $f$ . Los números críticos y  $0$  se escriben en la recta numérica porque el signo de la derivada a la izquierda y a la derecha de  $0$  indica el comportamiento de  $f$ . Como se observa en la FIGURA 5.4.6a),  $f'(x) < 0$  para  $-\infty < x < -1$  y  $f'(x) > 0$  para  $-1 < x < 0$ . Concluimos que  $f(-1) = 0$  es un mínimo relativo (al mismo tiempo,  $f(-1) = 0$  muestra que  $x = -1$  es la coordenada  $x$  de una intersección  $x$ ). Al continuar,  $f'(x) < 0$  para  $0 < x < \frac{1}{2}$  y  $f'(x) > 0$  para  $\frac{1}{2} < x < \infty$  muestra que  $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} - \ln \frac{1}{2} \approx 1.44$  es otro mínimo relativo.

Verifique que  $f(-x) \neq f(x)$   
y  $f(-x) \neq -f(x)$ .

Como se observó,  $f$  no está definida en  $x = 0$ , de modo que no hay intersección  $y$ . Por último, no hay simetría con respecto al eje  $y$  o con respecto al origen. La gráfica de la función  $f$  se muestra en la figura 5.4.6b).

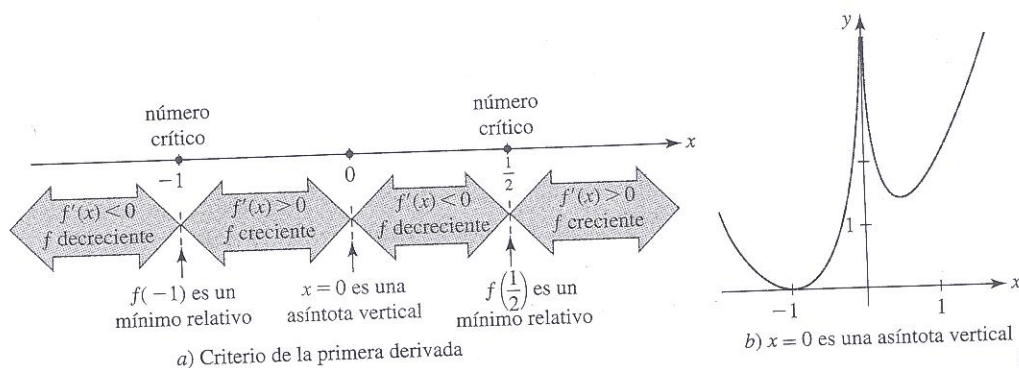


FIGURA 5.4.6 Gráfica de la función en el ejemplo 4

### EJEMPLO 5 Gráfica con una cúspide

Grafique  $f(x) = -x^{5/3} + 5x^{2/3}$ .

**Solución** La derivada es

$$f'(x) = -\frac{5}{3}x^{2/3} + \frac{10}{3}x^{-1/3} = \frac{5}{3} \frac{-x + 2}{x^{1/3}}.$$

Observe que  $f'$  no existe en  $0$  pero  $0$  está en el dominio de la función puesto que  $f(0) = 0$ . Los números críticos son  $0$  y  $2$ . El criterio de la primera derivada, ilustrado en la FIGURA 5.4.7a), muestra que  $f(0) = 0$  es un mínimo relativo y que  $f(2) = -(2)^{5/3} + 5(2)^{2/3} \approx 4.76$  es un máximo relativo. Además, puesto que  $f'(x) \rightarrow \infty$  cuando  $x \rightarrow 0^+$  y  $f'(x) \rightarrow -\infty$  cuando  $x \rightarrow 0^-$  en  $(0, 0)$  hay una cúspide. Por último, al escribir  $f(x) = x^{2/3}(-x + 5)$ , vemos que  $f(x) = 0$  y que  $x = 5$ . Las intersecciones  $x$  son los puntos  $(0, 0)$  y  $(5, 0)$ . La gráfica de  $f$  se muestra en la figura 5.4.7b).

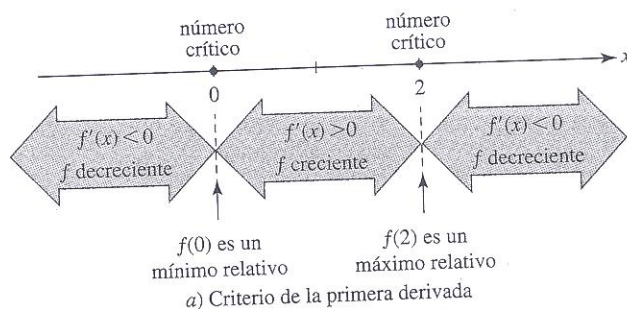


FIGURA 5.4.7 Gráfica de la función en el ejemplo 5

Algunas veces resulta conveniente saber antes de graficar, e incluso antes de molestarse en graficar, si un extremo relativo  $f(c)$  es un extremo absoluto. El siguiente teorema es algo útil. Usted debe trazar algunas gráficas y convencerse sobre la validez del teorema.



**Teorema 5.4.2** Prueba del único número crítico

Suponga que  $c$  es el único número crítico de una función  $f$  dentro de un intervalo  $I$ . Si se demuestra que  $f(c)$  es un extremo relativo, entonces  $f(c)$  es un extremo absoluto.

En el ejemplo 3, mediante el criterio de la primera derivada se demostró que  $f(0) = 0$  es un mínimo relativo. También se hubiera podido concluir de inmediato que este valor de la función es un mínimo absoluto. Este hecho se concluye por el teorema 5.4.2 porque 0 es el único número crítico en el intervalo  $(-\infty, \infty)$ .

**5.4****DESARROLLE SU COMPETENCIA**

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-15.

**Fundamentos**

En los problemas 1-32, use el criterio de la primera derivada para encontrar los extremos relativos de la función dada. Grafique. Encuentre las intersecciones cuando sea posible.

1.  $f(x) = -x^2 + 2x + 1$
2.  $f(x) = (x - 1)(x + 3)$
3.  $f(x) = x^3 - 3x$
4.  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 1$
5.  $f(x) = x(x - 2)^2$
6.  $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$
7.  $f(x) = x^3 + x - 3$
8.  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 3$
9.  $f(x) = x^4 + 4x$
10.  $f(x) = (x^2 - 1)^2$
11.  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$
12.  $f(x) = 2x^4 - 16x^2 + 3$
13.  $f(x) = -x^2(x - 3)^2$
14.  $f(x) = -3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 2$
15.  $f(x) = 4x^5 - 5x^4$
16.  $f(x) = (x - 2)^2(x + 3)^3$
17.  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$
18.  $f(x) = x + \frac{25}{x}$
19.  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$
20.  $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$
21.  $f(x) = \frac{10}{x^2 + 1}$
22.  $f(x) = \frac{x^2}{x^4 + 1}$
23.  $f(x) = (x^2 - 4)^{2/3}$
24.  $f(x) = (x^2 - 1)^{1/3}$
25.  $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$
26.  $f(x) = x(x^2 - 5)^{1/3}$
27.  $f(x) = x - 12x^{1/3}$
28.  $f(x) = x^{4/3} + 32x^{1/3}$
29.  $f(x) = x^3 - 24 \ln|x|$
30.  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
31.  $f(x) = (x + 3)^2 e^{-x}$
32.  $f(x) = 8x^2 e^{-x^2}$

En los problemas 33-36, trace una gráfica de la función  $f$  cuya derivada  $f'$  tiene la gráfica dada.

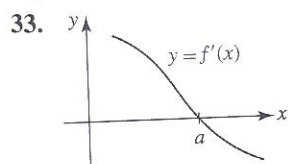


FIGURA 5.4.8 Gráfica para el problema 33

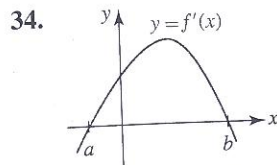


FIGURA 5.4.9 Gráfica para el problema 34

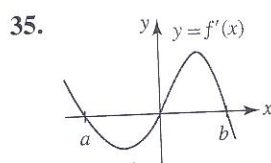


FIGURA 5.4.10 Gráfica para el problema 35

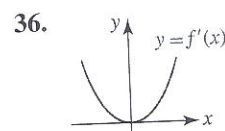


FIGURA 5.4.11 Gráfica para el problema 36

En los problemas 37 y 38, trace la gráfica de  $f'$  a partir de la gráfica de  $f$ .

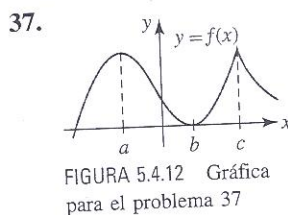


FIGURA 5.4.12 Gráfica para el problema 37

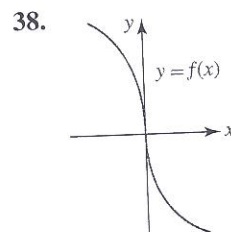


FIGURA 5.4.13 Gráfica para el problema 38

En los problemas 39-42, trace una gráfica de una función  $f$  que tenga las propiedades dadas.

39.  $f(-1) = 0, f(0) = 1$   
 $f'(3)$  no existe,  $f'(5) = 0$   
 $f'(x) > 0, x < 3$  y  $x > 5$   
 $f'(x) < 0, 3 < x < 5$
40.  $f(0) = 0$   
 $f'(-1) = 0, f'(0) = 0, f'(1) = 0$   
 $f'(x) < 0, x < -1, -1 < x < 0$   
 $f'(x) > 0, 0 < x < 1, x > 1$
41.  $f(-x) = f(x)$   
 $f(2) = 3$   
 $f'(x) < 0, 0 < x < 2$   
 $f'(x) > 0, x > 2$
42.  $f(1) = -2, f(0) = -1$   
 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \infty, f'(4) = 0$   
 $f'(x) < 0, x < 1$   
 $f'(x) < 0, x > 4$



En los problemas 43 y 44, determine dónde la pendiente de la tangente a la gráfica de la función dada tiene un máximo relativo o un mínimo relativo.

43.  $f(x) = x^3 + 6x^2 - x$       44.  $f(x) = x^4 - 6x^2$
45. a) A partir de la gráfica de  $g(x) = \sin 2x$  determine los intervalos para los cuales  $g(x) > 0$  y los intervalos para los cuales  $g(x) < 0$ .  
 b) Encuentre los números críticos de  $f(x) = \sin^2 x$ . Use el criterio de la primera derivada y la información en el inciso a) para encontrar los extremos relativos de  $f$ .  
 c) Trace la gráfica de la función  $f$  en el inciso b).
46. a) Encuentre los números críticos de  $f(x) = x - \sin x$ .  
 b) Demuestre que  $f$  no tiene extremos relativos.  
 c) Trace la gráfica de  $f$ .

### ≡ Aplicaciones

47. La **media aritmética**, o **promedio**, de  $n$  números  $a_1, a_2, \dots, a_n$  está dada por

$$\bar{x} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

- a) Demuestre que  $\bar{x}$  es un número crítico de la función  $f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2$ .  
 b) Demuestre que  $f(\bar{x})$  es un mínimo relativo.
48. Cuando el sonido pasa de un medio a otro, puede perder algo de su energía debido a una diferencia en las resistencias acústicas de los dos medios. (La resistencia acústica es el producto de la densidad y la elasticidad.) La fracción de la energía transmitida está dada por

$$T(r) = \frac{4r}{(r+1)^2},$$

donde  $r$  es la razón de las resistencias acústicas de los dos medios.

- a) Demuestre que  $T(r) = T(1/r)$ . Explique el significado físico de esta expresión.  
 b) Use el criterio de la primera derivada para encontrar los extremos relativos de  $T$ .  
 c) Trace la gráfica de la función  $T$  para  $r \geq 0$ .

### ≡ Piense en ello

49. Encuentre valores de  $a, b$  y  $c$  tales que  $f(x) = ax^2 + bx + c$  tenga un máximo relativo 6 en  $x = 2$  y la gráfica de  $f$  tenga intersección y igual a 4.
50. Encuentre valores de  $a, b, c$  y  $d$  tales que  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  tenga un mínimo relativo  $-3$  en  $x = 0$  y un máximo relativo 4 en  $x = 1$ .
51. Suponga que  $f$  es una función diferenciable cuya gráfica es simétrica con respecto al eje  $y$ . Demuestre que  $f'(0) = 0$ .  
 ¿Tiene  $f$  necesariamente un extremo relativo en  $x = 0$ ?
52. Sean  $m$  y  $n$  enteros positivos. Demuestre que  $f(x) = x^m(x-1)^n$  siempre tiene un mínimo relativo.
53. Suponga que  $f$  y  $g$  son diferenciables y que tienen máximos relativos en el mismo número crítico  $c$ .  
 a) Demuestre que  $c$  es un número crítico para las  $f + g, f - g$  y  $fg$ .  
 b) ¿Se concluye que las  $f + g, f - g$  y  $fg$  tienen máximos relativos en  $c$ ? Demuestre sus aseveraciones o dé un contraejemplo.

## 5.5 Criterio de la segunda derivada

**■ Introducción** En el siguiente análisis el objetivo es relacionar el concepto de concavidad con la segunda derivada de una función. Así, la segunda derivada constituye otra manera para probar si un extremo relativo de una función  $f$  ocurre en un número crítico.

**■ Concavidad** Tal vez usted tiene una idea intuitiva del significado de concavidad. En las FIGURAS 5.5.1a) y 5.5.1b) se ilustran formas geométricas cóncavas hacia arriba y cóncavas hacia abajo, respectivamente. Por ejemplo, el Arco de San Luis Missouri es cóncavo hacia abajo; los cables entre los soportes verticales del puente Golden Gate son cóncavos hacia arriba. A menudo decimos que una forma cóncava hacia arriba "contiene agua", mientras una forma cóncava hacia abajo "derrama agua". No obstante, la definición precisa de concavidad se proporciona en términos de la derivada.



a) "Contiene agua"



b) "Derrama agua"

FIGURA 5.5.1 Concavidad

### Definición 5.5.1 Concavidad

Sea  $f$  una función diferenciable sobre un intervalo  $(a, b)$ .

- i) Si  $f'$  es una función creciente sobre  $(a, b)$ , entonces la gráfica de  $f$  es cóncava **hacia arriba** sobre el intervalo.  
 ii) Si  $f'$  es una función decreciente sobre  $(a, b)$ , entonces la gráfica de  $f$  es cóncava **hacia abajo** sobre el intervalo.

HOLA, DEBEN ESTAR ATENTOS, ¡TODOS!



En otras palabras, si las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de  $f$  crecen (decrecen) cuando  $x$  crece sobre  $(a, b)$ , entonces la gráfica de  $f$  es cóncava hacia arriba (abajo) sobre el intervalo. Si las pendientes crecen (decrecen) cuando  $x$  crece, entonces esto significa que las rectas tangentes giran en sentido contrario al de las manecillas del reloj sobre el intervalo. La validez de la definición 5.5.1 se ilustra en la FIGURA 5.5.2. Una manera equivalente de considerar la concavidad también resulta evidente a partir de la figura 5.5.2. La gráfica de una función  $f$  es cóncava hacia arriba (hacia abajo) sobre un intervalo si la gráfica en cualquier punto se encuentra por arriba (abajo) de las rectas tangentes.

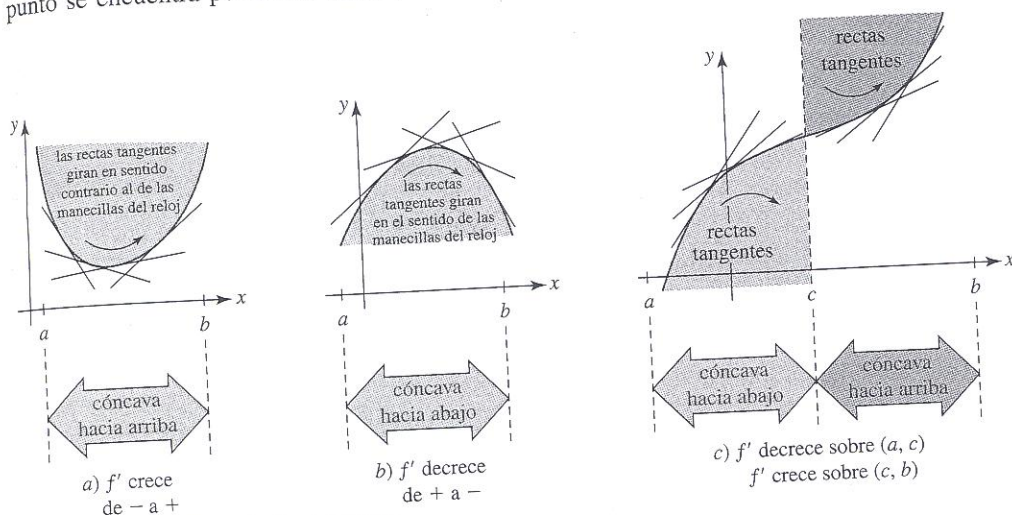


FIGURA 5.5.2 Concavidad sobre intervalos

**■ Concavidad y la segunda derivada** En el teorema 5.3.4 de la sección 5.3 vimos que el signo algebraico de la derivada de una función indica cuándo la función es creciente o decreciente sobre un intervalo. En específico, si la función referida en la oración precedente es la derivada  $f'$ , entonces podemos concluir que el signo algebraico de la derivada de  $f'$ , es decir,  $f''$ , indica cuándo  $f'$  es creciente o decreciente sobre un intervalo. Por ejemplo, si  $f''(x) > 0$  sobre  $(a, b)$ , entonces  $f'$  es creciente sobre  $(a, b)$ . Debido a la definición 5.5.1, si  $f'$  es creciente sobre  $(a, b)$ , entonces la gráfica de  $f$  es cóncava hacia arriba sobre el intervalo. En consecuencia, se llega a la siguiente prueba para concavidad.

#### Teorema 5.5.1 Prueba para concavidad

Sea  $f$  una función para la cual  $f''$  existe sobre  $(a, b)$ .

- Si  $f''(x) > 0$  para toda  $x$  en  $(a, b)$ , entonces la gráfica de  $f$  es cóncava hacia arriba sobre  $(a, b)$ .
- Si  $f''(x) < 0$  para toda  $x$  en  $(a, b)$ , entonces la gráfica de  $f$  es cóncava hacia abajo sobre  $(a, b)$ .

#### EJEMPLO 1 Prueba para concavidad

Determine los intervalos sobre los cuales la gráfica de  $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2$  es cóncava hacia arriba y los intervalos sobre los cuales la gráfica es cóncava hacia abajo.

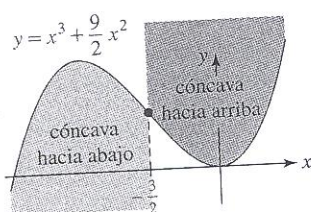
**Solución** A partir de  $f'(x) = 3x^2 + 9x$  obtenemos

$$f''(x) = 6x + 9 = 6\left(x + \frac{3}{2}\right).$$

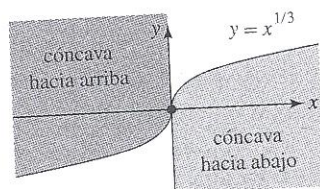
Se observa que  $f''(x) < 0$  cuando  $6\left(x + \frac{3}{2}\right) < 0$  o  $x < -\frac{3}{2}$  y que  $f''(x) > 0$  cuando  $6\left(x + \frac{3}{2}\right) > 0$  o  $x > -\frac{3}{2}$ . Por el teorema 5.5.1 concluimos que la gráfica de  $f$  es cóncava hacia abajo sobre el intervalo  $(-\infty, -\frac{3}{2})$  y cóncava hacia arriba sobre el intervalo  $(-\frac{3}{2}, \infty)$ .

**■ Punto de inflexión** La gráfica de la función en el ejemplo 1 cambia de concavidad en el punto que corresponde a  $x = -\frac{3}{2}$ . Cuando  $x$  crece a través de  $-\frac{3}{2}$ , la gráfica de  $f$  cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en el punto  $(-\frac{3}{2}, \frac{27}{4})$ . Un punto sobre la gráfica de una función donde la concavidad cambia de arriba abajo o viceversa tiene un nombre especial.





$$a) f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 0$$



$$b) f''(x) \text{ no existe en } 0$$

FIGURA 5.5.3 Puntos de inflexión

**Definición 5.5.2** Punto de inflexión

Sea  $f$  continua sobre un intervalo  $(a, b)$  que contiene al número  $c$ . Un punto  $(c, f(c))$  es un **punto de inflexión** de la gráfica de  $f$  si en  $(c, f(c))$  hay una recta tangente y la gráfica cambia de concavidad en este punto.

Al volver a examinar el ejemplo 1 se observa que  $f(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2$  es continua en  $-\frac{3}{2}$ , tiene una recta tangente en  $(-\frac{3}{2}, 0)$  y cambia de concavidad en este punto. Por tanto,  $(-\frac{3}{2}, 0)$  es un punto de inflexión. También observe que  $f''(-\frac{3}{2}) = 0$ . Vea la FIGURA 5.5.3a). También sabemos que la función  $f(x) = x^{1/3}$  es continua en 0 y tiene una tangente vertical en  $(0, 0)$  (vea el ejemplo 10 de la sección 4.2). A partir de  $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$  se observa que  $f''(x) > 0$  para  $x < 0$  y que  $f''(x) < 0$  para  $x > 0$ . Por tanto,  $(0, 0)$  es un punto de inflexión. Observe que en este caso  $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$  no está definida en  $x = 0$ . Vea la figura 5.5.3b). Estos dos casos se ilustran en el siguiente teorema.

**Teorema 5.5.2** Punto de inflexión

Si  $(c, f(c))$  es un punto de inflexión para la gráfica de una función  $f$ , entonces  $f''(c) = 0$  o  $f''(c)$  no existe.

■ **Criterio de la segunda derivada** Si  $c$  es un número crítico de una función  $y = f(x)$  y, por ejemplo,  $f''(c) > 0$ , entonces la gráfica de  $f$  es cóncava hacia arriba sobre algún intervalo abierto  $(a, b)$  que contiene a  $c$ . Entonces, necesariamente  $f(c)$  es un mínimo relativo. En forma semejante,  $f''(c) < 0$  en un valor crítico  $c$  implica que  $f(c)$  es un máximo relativo. Este teorema se denomina **criterio de la segunda derivada** y se ilustra en la FIGURA 5.5.4.

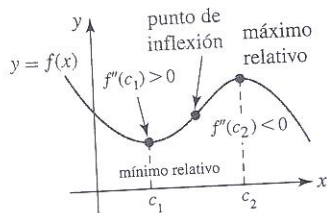


FIGURA 5.5.4 Criterio de la segunda derivada

**Teorema 5.5.3** Criterio de la segunda derivada

Sea  $f$  una función para la cual  $f''$  existe sobre un intervalo  $(a, b)$  que contiene al número crítico  $c$ .

- Si  $f''(c) > 0$ , entonces  $f(c)$  es un mínimo relativo.
- Si  $f''(c) < 0$ , entonces  $f(c)$  es un máximo relativo.
- Si  $f''(c) = 0$ , entonces la prueba falla y  $f(c)$  puede ser o no un extremo relativo. En este caso usamos el criterio de la primera derivada.

En este punto podría plantearse la pregunta: ¿por qué se requiere otra prueba para extremos relativos cuando ya se cuenta con el criterio de la primera derivada? Si la función  $f$  en consideración es un polinomio, es muy sencillo calcular la segunda derivada. Al usar el teorema 5.5.3 sólo necesitamos determinar el signo algebraico de  $f''(x)$  en el número crítico. Compare esto con el teorema 5.4.1, donde es necesario determinar el signo de  $f'(x)$  en los números a la derecha y a la izquierda del número crítico. Si no es fácil factorizar  $f'$ , el último procedimiento puede ser algo difícil. Por otra parte, puede resultar igualmente tedioso usar el teorema 5.5.3 en el caso de algunas funciones que impliquen productos, cocientes, potencias, etcétera. Por tanto, los teoremas 5.4.1 y 5.5.3 pueden tener ventajas y desventajas.

**EJEMPLO 2** Criterio de la segunda derivada

Grafique  $f(x) = 4x^4 - 4x^2$ .

**Solución** A partir de  $f(x) = 4x^2(x^2 - 1) = 4x^2(x + 1)(x - 1)$  se observa que la gráfica de  $f$  tiene las intersecciones  $(-1, 0)$ ,  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$ . Además, puesto que  $f$  es un polinomio que sólo tiene potencias pares, concluimos que su gráfica es simétrica con respecto al eje  $y$  (función par). Así, las derivadas primera y segunda son

$$f'(x) = 16x^3 - 8x = 8x(\sqrt{2}x + 1)(\sqrt{2}x - 1)$$

$$f''(x) = 48x^2 - 8 = 8(\sqrt{6}x + 1)(\sqrt{6}x - 1).$$

A partir de  $f'$  vemos que los números críticos de  $f$  son  $0$ ,  $-\sqrt{2}/2$  y  $\sqrt{2}/2$ . El criterio de la segunda derivada se resume en la tabla siguiente.



$x$	Signo de $f''(x)$	$f(x)$	Conclusión
0	-	0	máximo relativo
$\sqrt{2}/2$	+	-1	mínimo relativo
$-\sqrt{2}/2$	+	-1	mínimo relativo

Por último, a partir de la forma factorizada de  $f''$  observamos que  $f''(x)$  cambia de signo en  $x = -\sqrt{6}/6$  y en  $x = \sqrt{6}/6$ . Por tanto, la gráfica de  $f$  tiene dos puntos de inflexión:  $(-\sqrt{6}/6, -\frac{5}{9})$  y  $(\sqrt{6}/6, -\frac{5}{9})$ . Vea la FIGURA 5.5.5.

### EJEMPLO 3 Fracaso del criterio de la segunda derivada

Considere la función simple  $f(x) = x^4 + 1$ . A partir de  $f'(x) = 4x^3$  vemos que 0 es un número crítico. Pero por la segunda derivada  $f''(x) = 12x^2$  obtenemos  $f''(0) = 0$ . Por tanto, el criterio de la segunda derivada no conduce a ninguna conclusión. No obstante, a partir de la primera derivada  $f'(x) = 4x^3$  vemos lo siguiente:

$$f'(x) < 0 \text{ para } x < 0 \quad \text{y} \quad f'(x) > 0 \text{ para } x > 0.$$

El criterio de la primera derivada indica que  $f(0) = 1$  es un mínimo relativo. La FIGURA 5.5.6 muestra que  $f(0) = 1$  es realmente un mínimo absoluto.

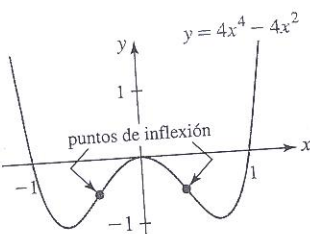


FIGURA 5.5.5 Gráfica de la función en el ejemplo 2

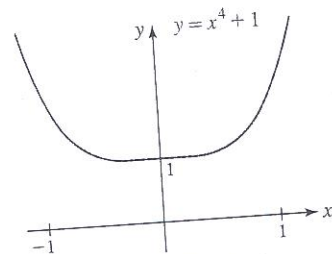


FIGURA 5.5.6 Gráfica de la función en el ejemplo 3

### EJEMPLO 4 Criterio de la segunda derivada

Grafique  $f(x) = 2 \cos x - \cos 2x$ .

**Solución** Debido a que  $\cos x$  y  $\cos 2x$  son pares, la gráfica de  $f$  es simétrica con respecto al eje  $y$ . También,  $f(0) = 1$  produce la intersección  $(0, 1)$ . Así, las derivadas primera y segunda son

$$f'(x) = -2 \sin x + 2 \sin 2x \quad \text{y} \quad f''(x) = -2 \cos x + 4 \cos 2x.$$

Al usar la identidad trigonométrica  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$  es posible simplificar la ecuación  $f'(x) = 0$  a  $\sin x(1 - 2 \cos x) = 0$ . Las soluciones de  $\sin x = 0$  son  $0, \pm\pi, \pm2\pi, \dots$  y las soluciones de  $\cos x = \frac{1}{2}$  son  $\pm\pi/3, \pm5\pi/3, \dots$ . Pero como el periodo de  $f$  es  $2\pi$  (¡ demuéstrela! ), es suficiente considerar sólo los números críticos en  $[0, 2\pi]$ , a saber,  $0, \pi/3, \pi, 5\pi/3$  y  $2\pi$ . En la tabla siguiente se resume la aplicación del criterio de la segunda derivada a estos valores.

$x$	Signo de $f''(x)$	$f(x)$	Conclusión
0	+	1	mínimo relativo
$\pi/3$	-	$\frac{3}{2}$	máximo relativo
$\pi$	+	-3	mínimo relativo
$5\pi/3$	-	$\frac{3}{2}$	máximo relativo
$2\pi$	+	1	mínimo relativo

La gráfica de  $f$  es la extensión con periodo  $2\pi$  de la porción más gruesa que se muestra en la FIGURA 5.5.7 sobre el intervalo  $[0, 2\pi]$ .

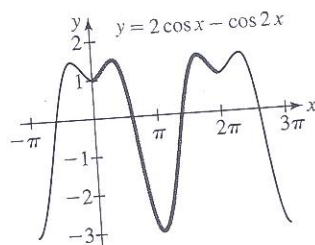


FIGURA 5.5.7 Gráfica de la función en el ejemplo 4

### $f'(x)$ NOTAS DESDE EL AULA

- i) Si  $(c, f(c))$  es un punto de inflexión, entonces  $f''(c) = 0$  o  $f''(c)$  no existe. El converso de esta afirmación no necesariamente es verdadero. No es posible concluir, simplemente a partir del hecho de que cuando  $f''(c) = 0$  o  $f''(c)$  no existe, que  $(c, f(c))$  es un punto de inflexión. En este sentido, en el ejemplo 3 vimos que  $f''(0) = 0$  para  $f(x) = x^4 + 1$ . Pero a partir de la figura 5.5.6 resulta evidente que  $(0, f(0))$  no es un punto de inflexión.



También, para  $f(x) = 1/x$ , vemos que  $f''(x) = 2/x^3$  está indefinida en  $x = 0$  y que la gráfica de  $f$  cambia de concavidad en  $x = 0$ :

$$f''(x) < 0 \text{ para } x < 0 \quad \text{y} \quad f''(x) > 0 \text{ para } x > 0.$$

No obstante,  $x = 0$  no es la coordenada  $x$  de un punto de inflexión porque  $f$  no es continua en 0.

- ii) Usted no debe pensar que la gráfica de una función debe tener concavidad. Hay funciones perfectamente bien diferenciables cuyas gráficas no poseen concavidad. Vea el problema 60 en la sección "Desarrolle su competencia 5.5".
- iii) Usted debe estar al tanto de que los libros de texto no coinciden respecto a la definición precisa de punto de inflexión. Esto no es algo por lo cual deba preocuparse, pero si usted tiene interés, vea el problema 65 en la sección "Desarrolle su competencia 5.5".

## 5.5

## DESARROLLE SU COMPETENCIA

Las respuestas de los problemas impares comienzan en la página RES-16.

## Fundamentos

En los problemas 1-12, use la segunda derivada para determinar los intervalos sobre los cuales la gráfica de la función dada es cóncava hacia arriba y los intervalos sobre los cuales es cóncava hacia abajo. Grafique.

1.  $f(x) = -x^2 + 7x$
2.  $f(x) = -(x+2)^2 + 8$
3.  $f(x) = -x^3 + 6x^2 + x - 1$
4.  $f(x) = (x+5)^3$
5.  $f(x) = x(x-4)^3$
6.  $f(x) = 6x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 3$
7.  $f(x) = x^{1/3} + 2x$
8.  $f(x) = x^{8/3} - 20x^{2/3}$
9.  $f(x) = x + \frac{9}{x}$
10.  $f(x) = \sqrt{x^2 + 10}$
11.  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3}$
12.  $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$

En los problemas 13-16, a partir de la gráfica de la función dada  $f$  calcule los intervalos sobre los cuales  $f'$  es creciente y los intervalos sobre los cuales  $f'$  es decreciente.

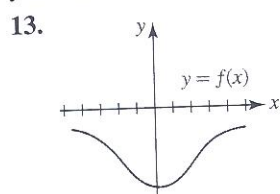


FIGURA 5.5.8 Gráfica para el problema 13

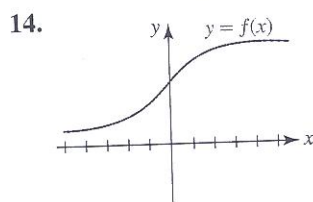


FIGURA 5.5.9 Gráfica para el problema 14

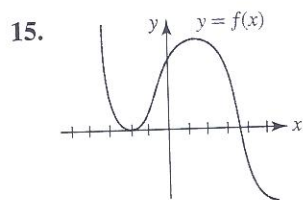


FIGURA 5.5.10 Gráfica para el problema 15

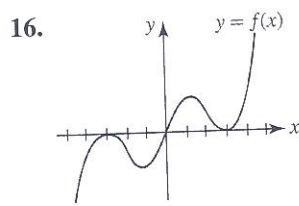


FIGURA 5.5.11 Gráfica para el problema 16

17. Demuestre que la gráfica de  $f(x) = \sec x$  es cóncava hacia arriba sobre los intervalos donde  $\cos x > 0$  y cóncava hacia abajo sobre los intervalos donde  $\cos x < 0$ .

18. Demuestre que la gráfica de  $f(x) = \csc x$  es cóncava hacia arriba sobre los intervalos donde  $\sin x > 0$  y cóncava hacia abajo sobre los intervalos donde  $\sin x < 0$ .

En los problemas 19-26, use la segunda derivada para localizar todos los puntos de inflexión.

19.  $f(x) = x^4 - 12x^2 + x - 1$
20.  $f(x) = x^{5/3} + 4x$
21.  $f(x) = \sin x$
22.  $f(x) = \cos x$
23.  $f(x) = x - \sin x$
24.  $f(x) = \tan x$
25.  $f(x) = x + xe^{-x}$
26.  $f(x) = xe^{-x^2}$

En los problemas 27-44, use el criterio de la segunda derivada, cuando sea pertinente aplicarlo, para encontrar los extremos relativos de la función dada. Grafique y encuentre todos los puntos de inflexión cuando sea posible.

27.  $f(x) = -(2x-5)^2$
28.  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 12x$
29.  $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
30.  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$
31.  $f(x) = 6x^5 - 10x^3$
32.  $f(x) = x^3(x+1)^2$
33.  $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$
34.  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$
35.  $f(x) = \sqrt{9-x^2}$
36.  $f(x) = x\sqrt{x-6}$
37.  $f(x) = x^{1/3}(x+1)$
38.  $f(x) = x^{1/2} - \frac{1}{4}x$
39.  $f(x) = \cos 3x, [0, 2\pi]$
40.  $f(x) = 2 + \sin 2x, [0, 2\pi]$
41.  $f(x) = \cos x + \sin x, [0, 2\pi]$
42.  $f(x) = 2 \sin x + \sin 2x, [0, 2\pi]$
43.  $f(x) = 2x - x \ln x$
44.  $f(x) = \ln(x^2 + 2)$

En los problemas 45-48, determine si la función dada tiene un extremo relativo en el número crítico indicado.

45.  $f(x) = \sin x \cos x; \pi/4$
46.  $f(x) = x \sin x; 0$
47.  $f(x) = \tan^2 x; \pi$
48.  $f(x) = (1 + \sin 4x)^3; \pi/8$

En los problemas 49-52, trace una gráfica de una función que tenga las propiedades dadas.



49.  $f(-2) = 0, f(4) = 0$   
 $f'(3) = 0, f''(1) = 0, f''(2) = 0$   
 $f''(x) < 0, x < 1, x > 2$   
 $f''(x) > 0, 1 < x < 2$
50.  $f(0) = 5, f(2) = 0$   
 $f'(2) = 0, f''(3)$  no existe  
 $f''(x) > 0, x < 3$   
 $f''(x) < 0, x > 3$

51.  $f(0) = -1, f(\pi/2) > 0$   
 $f'(x) \geq 0$  para toda  $x$   
 $f''(x) > 0, (2n-1)\frac{\pi}{2} < x < (2n+1)\frac{\pi}{2}, n$  par  
 $f''(x) < 0, (2n-1)\frac{\pi}{2} < x < (2n+1)\frac{\pi}{2}, n$  impar

52.  $f(-x) = -f(x)$   
 asíntota vertical  $x = 2, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$   
 $f''(x) < 0, 0 < x < 2$   
 $f''(x) > 0, x > 2$

≡ Piense en ello

53. Encuentre valores de  $a, b$  y  $c$  tales que la gráfica de  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$  pase por  $(-1, 0)$  y tenga un punto de inflexión en  $(1, 1)$ .
54. Encuentre valores de  $a, b$  y  $c$  tales que la gráfica de  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$  tenga una tangente horizontal en el punto de inflexión en  $(1, 1)$ .
55. Use el criterio de la segunda derivada como ayuda para graficar  $f(x) = \sin(1/x)$ . Observe que  $f$  es discontinua en  $x = 0$ .
56. Demuestre que la gráfica de una función polinomial general

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, a_n \neq 0$$

puede tener cuando mucho  $n - 2$  puntos de inflexión.

57. Sea  $f(x) = (x - x_0)^n$ , donde  $n$  es un entero positivo.
- a) Demuestre que  $(x_0, 0)$  es un punto de inflexión de la gráfica de  $f$  si  $n$  es un entero impar.

- b) Demuestre que  $(x_0, 0)$  no es un punto de inflexión de la gráfica de  $f$ , sino que corresponde a un mínimo relativo cuando  $n$  es un entero par.

58. Demuestre que la gráfica de una función polinomial cuadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ , es cóncava hacia arriba sobre el eje  $x$  cuando  $a > 0$  y cóncava hacia abajo sobre el eje  $x$  cuando  $a < 0$ .

59. Sea  $f$  una función para la cual  $f''$  existe sobre un intervalo  $(a, b)$  que contiene al número  $c$ . Si  $f''(c) = 0$  y  $f'''(c) \neq 0$ , ¿qué puede afirmarse sobre  $(c, f(c))$ ?

60. Proporcione un ejemplo de una función diferenciable cuya gráfica no tenga concavidad. No piense demasiado.

61. Demuestre o refute lo siguiente. Un punto de inflexión para una función  $f$  debe ocurrir en un valor crítico de  $f'$ .

62. Sin graficar, explique por qué la gráfica de  $f(x) = 10x^2 - x - 40 + e^x$  no puede tener un punto de inflexión.

63. Demuestre o refute lo siguiente. La función

$$f(x) = \begin{cases} 4x^2 - x, & x \leq 0 \\ -x^3, & x > 0 \end{cases}$$

tiene un punto de inflexión en  $(0, 0)$ .

64. Suponga que  $f$  es una función polinomial de grado 3 y que  $c_1$  y  $c_2$  son números críticos distintos.

- a)  $f(c_1)$  y  $f(c_2)$ , ¿son necesariamente extremos relativos de la función? Demuestre su respuesta.
- b) ¿Cuál considera que es la coordenada  $x$  del punto de inflexión para la gráfica de  $f$ ? Demuestre su respuesta.

≡ Proyecto

65. **Puntos de inflexión** Encuentre otros libros de texto de cálculo y anote cómo definen el punto de inflexión. Luego, investigue en internet acerca de la definición de punto de inflexión. Escriba un breve artículo en que compare estas definiciones. Ilustre su artículo con gráficas idóneas.

## 5.6 Razones de cambio

■ **Introducción** En esta sección abordaremos las **razones de cambio**. La derivada  $dy/dx$  de una función  $y = f(x)$  es su razón de cambio instantánea con respecto a la variable  $x$ . En la sección 5.1 vimos que cuando una función  $s = s(t)$  describe la posición de un objeto que se mueve sobre una recta horizontal o vertical, la razón de cambio con el tiempo  $ds/dt$  se interpreta como la velocidad del objeto. En general, una razón de cambio con el tiempo es la respuesta a la pregunta: ¿cuán rápido cambia la cantidad? Por ejemplo, si  $V$  representa el volumen que cambia con el tiempo, entonces  $dV/dt$  es la razón, o cuán rápido cambia el volumen con respecto al tiempo  $t$ . Una razón de, por ejemplo,  $dV/dt = 5$  pies<sup>3</sup>/s significa que el volumen aumenta 5 pies cúbicos cada segundo. Vea la FIGURA 5.6.1. En forma semejante, si una persona camina hacia el poste mostrado en la FIGURA 5.6.2 a razón constante de 3 pies/s, entonces sabemos que  $dx/dt = -3$  pies/s. Por otra parte, si la persona se aleja del poste, entonces  $dx/dt = 3$  pies/s. Las razones negativa y positiva significan, por supuesto, que la distancia  $x$  de la persona al poste disminuye (3 pies cada segundo) y aumenta (3 pies cada segundo), respectivamente.

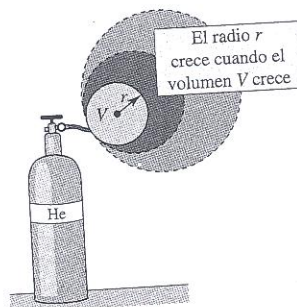


FIGURA 5.6.1 A medida que un globo esférico se llena con gas, su volumen, radio y área superficial cambian con el tiempo